Multidimensionale normalfordelinger

# Normalfordeling i en dimension

Den endimensionale *normalfordeling* (eller Gauss-fordeling) med middelværdi og varians har frekvensfunktionen:

Vi vil også her tænke på tilfældet hvor , altså hvor al vægten en samlet i som værende en normalfordeling. Dette tilfælde kaldes nogle gange for *degenereret*.

Hvis den stokastiske variabel er normalfordelt med middelværdi og varians skriver vi:

# Multidimensional normalfordeling

**Definition**: En stokastisk vektor er en *multidimensional normalfordeling* (m.n.d.) hvis enhver linearkombination af elementer i er en endimensional normalfordeling.

Sagt på en anden måske skal der for alle gælde at er normalfordelt.

Dette er en betydeligt stærkere betingelse end at de marginale fordelinger hver for sig er normalfordelte.

**Definition**: Hvis er en multidimensional normalfordeling og hvor og hvor skriver vi . kaldes middelværdien og kovariansmatricen for fordelingen.

Da er en symmetrisk matrix er den også positivt semidefinit.

**Definition**: En m.n.d. kaldes *degenereret* hvis .

Intuition: En degenereret m.n.d. lever i et affint underrum af med dimension mindre end .

# Momentgenererende funktion for multidimensional normalfordeling

**Definition**: For en stokastisk vektor er den momentgenererende funktion givet ved:

Her er altså lig med . For en m.v.n. er denne størrelse normalfordelt, så vi har:

**Sætning**: For en stokastisk vektor er den momentgenererende funktion:

Bevis: Den momentgenererende funktion er pr. definition:

Den momentgenererende funktion for en endimensional normalfordeling er:

Da indholdet af eksponentialfunktionen er normalfordelt har vi altså:

Brug de almindelige regneregler for forventningsværdi og varians:

Sætningen følger nu umiddelbart. Bevis slut.

# Korrelation vs. afhængighed for multidimensional normalfordeling

**Sætning**: Hvis og er og uafhængige.

Bevis: Den momentgenererende funktion er:

kan skrives:

Da er der ikke nogen led der indeholder i eksponenten, og de kan derfor separeres i hver sin sum. Dermed er de to tilsvarende stokastiske variable og uafhængige. Bevis slut.

Denne vigtige egenskab for m.d.v.’er bruges bl.a. i beviset for følgende:

**Sætning**: De stokastiske variable er uafhængige og hvis og kun hvis den stokastiske vektor , hvor .

Bevis: ””: Hvis er uafhængige og og er en linearkombination af normfordelinger, hvilket igen er normalfordelt. Så følger en m.n.d. middelværdien er oplagt , og da de forskellige komponenter er uafhængige er kovariansmatricen diagonal med de enkelte varianser i diagonalen.

””: Antag tilsvarende, at . Ved at vælge ser man, at er normalfordelt. Da er nul når betyder dette at og er ukorrelerede og dermed også uafhængige ifølge foregående sætning. Bevis slut.

Bemærk: Hvis hver især er normalfordelte er generelt ikke en m.d.n!

# Frekvensfunktion

## Frekvensfunktion for multidimensional standardnormalfordeling

**Sætning**: En m.d.n. , hvor er enhedsmatricen i dimension har fordelingsfunktionen:

Bevis: Da kovariansmatricen er diagonal er de enkelte komponenter af indbyrdes uafhængige. Hver af disse har både middelværdi og varians . De er med andre ord alle standardnormalfordelte. Da de er uafhængige er den samlede frekvensfunktion blot produktet af de enkelte fordelingsfunktioner:

Bevis slut.

En sådan m.d.n. kaldes for en *multidimensional standardnormalfordeling*.

## Affin transformationsegenskab

**Sætning**: Lad være en -dimensional m.d.n. Lad og . Da er:

Bevis: Den karakteristiske funktion for den transformerede variabel er:

Sæt nu . Så er , og dermed:

Vi ser og dermed:

Dette er netop den momentgenererende funktion for en m.d.n. med middelværdi og kovariansmatrix . Bevis slut.

## Fordelingsfunktion for generel multidimensional normalfordeling

Lad være en positivt semidefinit, symmetrisk matrix. Da er symmetrisk kan den diagonaliseres af en ortogonal matrix , således at , hvor er en diagonalmatrix med ’s egenværdier i diagonalen: . Da er positivt demidefinit er alle disse egenværdier ikke-negative. Dermed eksisterer kvadratroden af alle disse. Sæt nu og definer:

Man kan nu regne:

Undervejs er det benyttet at , idet er ortogonal. Det giver altså mening at tænke på som kvadratroden af . Da transformationen er entydigt bestemt er det også.

Der gælder fælgende sætninger om sådanne kvadratrødder.

**Sætning**: Givet en positivt semidefinit, symmetrisk matrix , er

Bevis: , så . Bevis slut.

**Sætning**: Givet en positivt semidefinit, symmetrisk matrix , er en kvadratrod invertibel hvis og kun hvis er invertibel. I dette tilfælde sætter vi .

Bevis: Hvis har egenværdierne har egenværdierne . En matrix er invertibel hvis og kun hvis den ikke har nul som egenværdi. Sætningen følger heraf. Bevis slut.

**Sætning**: Givet en positivt definit (og dermed invertibel), symmetrisk matrix , er

Bevis: Determinanten af findes ved at bruge reglen :

Da er positivt definit er determinanten positiv, og der må derfor gælde . Idet følger sætningen af den sædvanlige regneregel for determinanter af inverse matricer: . Bevis slut.

Vi kan nu endelig samle trådene og finde frekvensfunktionen for en generel m.n.d.:

**Sætning**: En m.d.n. har en frekvensfunktion hvis og kun hvis , altså hvis fordelingen ikke er degenereret. I dette tilfælde er frekvensfunktionen givet ved:

Bevis: Betragt en standardnormalfordeling i dimensioner. Altså . Da er en kovariansmatrix er den positivt semidefinit og symmetrisk. har derfor en kvadratrod . Betragt nu koordinattransformationen . Ifølge den affine transformationsegenskab er:

Vi har altså genskabt en vilkårlig m.d.n. ud fra en standardnormalfordeling. Frekvensfunktionen kan nu findes vha. transformationssætningen:

For at bruge sætningen skal udtrykkes som funktion af . Sammenhængen er

Denne ligning har en løsning hvis og kun hvis er invertibel, og iflg. ovenstående sætning er invertibel hvis og kun hvis er invertibel. Antag dette er tilfældet. Da gælder der . Den tilhørede Jacobiand-matrix er:

Her er ovenstående sætning benyttet. Fordelingsfunktionen er nu:

Erstat nu med og sætningen er bevist. Bevis slut.

# Geometrisk intuition